

**MODIFIKASI ALGORITMA *WELCH-POWELL* UNTUK
PEWARNAAN GRAF (*VERTEX COLOURING*) PADA
PENJADWALAN KULIAH JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UIN SUSKA RIAU**

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Pada
Jurusan Matematika

Oleh :

UMI HASANAH
10754000092



**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2012**

**MODIFIKASI ALGORITMA *WELCH-POWELL*
UNTUK PEWARNAAN GRAF (*VERTEX COLORING*) PADA
PENJADWALAN KULIAH JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UIN SUSKA RIAU**

**UMI HASANAH
NIM : 10754000092**

Tanggal Sidang : 01 Februari 2012
Periode Wisuda : 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penjadwalan kuliah merupakan rutinitas yang sering terjadi dalam sistem akademik di Perguruan Tinggi. Jika dilihat secara individu, penyusunan jadwal secara manual bukanlah hal yang sulit karena adanya toleransi waktu dan jadwal perseorangan yang berbeda-beda. Namun jika masalah penjadwalan tersebut menyangkut banyak orang, maka hal tersebut menjadi sulit. Permasalahan di atas dapat diatasi dengan cara mengaplikasikan Modifikasi algoritma *Welch-Powell*. Sifat yang diadopsi pada algoritma tersebut menghasilkan pewarnaan graf, karena memprioritaskan simpul berderajat tertinggi yang pada implementasinya adalah mata kuliah yang terhubung oleh banyak mahasiswa, sehingga harus didahulukan untuk dijadwalkan, serta pengecekan simpul tetangga dari simpul yang sudah diwarnai dengan warna yang sama. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa jumlah warna minimum pada pewarnaan jadwal kuliah di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi pada semester ganjil, TA 2010-2011 ini adalah 12 warna.

Kata Kunci : Graf, Modifikasi Algoritma *Welch-Powell*, Pewarnaan Simpul.

DAFTAR ISI

	Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN.....	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL.....	iv
LEMBAR PERNYATAAN	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
<i>ABSTRACT</i>	viii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR TABEL.....	xiv
DAFTAR GAMBAR	xv
BAB I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	I-1
1.2 Rumusan Masalah	I-3
1.3 Batasan Masalah	I-4
1.4 Tujuan Penelitian.....	I-4
1.5 Manfaat Penelitian.....	I-4
1.6 Sistematika Penulisan	I-5
BAB II. LANDASAN TEORI	
2.1 Terminologi Graf.....	II-1
2.2 Pewarnaan Graf	II-5
2.2.1 Pewarnaan Simpul	II-5
2.2.2 Pewarnaan Sisi.....	II-6
2.3 Bilangan Kromatik	II-6
2.4 Algoritma Pewarnaan Graf.....	II-7
2.4.1 Algoritma Gabungan <i>Spanning Tree</i>	II-7
2.4.2 Algoritma <i>Welch-Powell</i>	II-8

2.4.3 Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i>	II-9
BAB III. METODOLOGI PENELITIAN	
3.1 Metodologi Pewarnaan Simpul	III-1
BAB IV. PEMBAHASAN DAN HASIL	
4.1 Jadwal Perkuliahan Jurusan Matematika.....	IV-1
4.2 Cara Merepresentasikan Tabel Matriks Studi Mahasiswa ke dalam Matriks <i>Adjacency</i>	IV-13
4.3 Cara Mempresentasikan Matriks <i>Adjacency</i> Studi Mahasiswa ke dalam Sebuah Graf	IV-15
4.4 Menentukan Derajat Setiap Simpul pada Graf Rencana Studi Mahasiswa Jurusan Matematika	IV-17
4.5 Pewarnaan Mata Kuliah pada Jadwal Kuliah Jurusan Matematika Menggunakan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i>	IV-19
4.6 Menentukan Jumlah Warna Minimum Jadwal Kuliah Jurusan Matematika.....	IV-76
BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN	
5.1 Kesimpulan.....	V-1
5.2 Saran	V-1
DAFTAR PUSTAKA	
DAFTAR RIWAYAT HIDUP	

DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
4.1 Matriks Rencana Studi Mahasiswa.....	IV-2
4.2 Derajat Simpul Graf Jadwal Kuliah Jurusan Matematika.....	IV-17
4.3 Pengurutan Simpul Jadwal Kuliah Berdasarkan Jumlah Derajat Terbanyak	IV-20
4.4 Daftar Simpul Bertetangga dan Tidak Bertetangga	IV-22
4.5 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (1) ..	IV-25
4.6 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (2) ..	IV-28
4.8 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (3) ..	IV-31
4.9 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (4) ..	IV-34
4.10 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (5) ..	IV-37
4.11 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (6) ..	IV-40
4.12 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (7) ..	IV-43
4.13 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (8) ..	IV-46
4.14 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (9) ..	IV-49
4.15 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (10)	IV-52
4.16 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (11)	IV-55
4.17 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (12)	IV-58
4.18 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (13)	IV-61
4.19 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (14)	IV-64
4.20 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (15)	IV-67
4.21 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (16)	IV-70
4.22 Matriks Pewarnaan Modifikasi Algoritma <i>Welch-Powell</i> (17)	IV-73
4.23 Jadwal Kuliah Jurusan Matematika Semester Ganjil Tahun Ajaran 2010-2011 yang Telah diwarnai	IV-77

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Penjadwalan kuliah merupakan suatu pekerjaan rutin dalam sistem akademik di perguruan tinggi yang dilakukan setiap menghadapi semester baru. Pada pelaksanaannya, seringkali jadwal yang telah dikeluarkan belum *fix* sehingga membutuhkan adanya penjadwalan ulang. Hal ini mengakibatkan perkuliahan di awal semester berjalan tidak efektif karena harus melakukan penyesuaian jadwal dengan keadaan *real* setelah jadwal dikeluarkan. Selain itu, kesulitan dalam hal pencarian *slot* yang masih kosong juga menjadi suatu kendala terutama pada saat mencari jadwal kuliah pengganti atau kuliah tambahan.

Proses penjadwalan kuliah memerlukan pemikiran yang cukup rumit untuk dapat memetakan sejumlah komponen penjadwalan (mata kuliah, dosen, mahasiswa, ruang, dan waktu) ke dalam *timeslot* (matriks ruang dan waktu) dengan mempertimbangkan semua batasan yang ada. Proses manual memerlukan waktu yang cukup lama untuk dapat melakukan hal ini dan memungkinkan terjadinya pelanggaran *constraint* akibat *human error*. Pelanggaran *constraint* dalam penjadwalan menjadikan jadwal tidak *valid* dan harus direkonstruksi ulang. Jika kejadian seperti ini selalu berulang tiap kali menghadapi semester baru, maka sepatutnya permasalahan ini mendapat prioritas untuk dicari solusinya demi peningkatan mutu sistem akademik di Perguruan Tinggi.

Permasalahan penjadwalan kuliah terkait erat dengan masalah optimasi. Oleh karena itu, pengembangan sistem penjadwalan kuliah dilakukan dengan melalui beberapa iterasi perbaikan. Fungsi tujuannya adalah memenuhi sejumlah *constraint* penjadwalan, seperti menghindari terjadinya bentrok jadwal. Dalam kajian ilmu di Matematika Diskrit, teori graf memberi solusi untuk permasalahan ini melalui bahasannya tentang pewarnaan graf.

Masalah pewarnaan di dalam graf memiliki banyak variasi dengan tipe yang berbeda. Pewarnaan graf dibagi dalam 3 bagian, yaitu pewarnaan simpul

(*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*) dan pewarnaan wilayah (*region coloring*) (Gross et al, 2006). Persoalan pewarnaan graf, tidak hanya sekedar mewarnai simpul-simpul atau sisi dengan warna berbeda dari warna simpul atau sisi tetangganya saja, namun juga menggunakan jumlah warna minimum yang disebut dengan bilangan kromatik pada graf. Pewarnaan dari suatu graf adalah masalah yang cukup mudah, tetapi pewarnaan dengan menggunakan warna minimum, secara umum adalah masalah yang sulit karena kenyataannya masih belum ditemukan suatu cara yang mudah dalam pengkarakteristikan suatu k -kromatik graf.

Pewarnaan simpul dari sebuah graf dalam aplikasinya adalah pemberian warna-warna pada mata kuliah di jadwal perkuliahan, dengan cara membuat matriks *adjacency* dari sebuah tabel matriks rencana studi mahasiswa, yang kemudian di representasikan kedalam sebuah graf. Teori pewarnaan simpul ini akan diaplikasikan pada pewarnaan jadwal perkuliahan di jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN SUSKA RIAU dengan mengambil jadwal kuliah pada semester ganjil, yang terdiri dari 30 mata kuliah yang diikuti oleh 267 orang mahasiswa/i.

Salah satu algoritma yang dapat digunakan untuk menentukan jumlah warna minimum pada pewarnaan graf adalah algoritma *Welch-Powell* dan algoritma gabungan *Spanning Tree*. Algoritma *Welch-Powell* merupakan salah satu metode yang digunakan untuk memecahkan masalah optimasi dengan melakukan pewarnaan berdasarkan derajat tertinggi dari simpul-simpulnya (LDO)(Heri S, 2009), sedangkan algoritma gabungan *Spanning Tree* memanfaatkan strategi pengecekan warna simpul yang terhubung oleh sisi yang bermasalah (Hengky Budiman, 2006). Berdasarkan penelitian sebelumnya, sudah dibahas tentang “Aplikasi Algoritma *Welch-Powell* pada Penjadwalan Kuliah” oleh Tatik Octiarsih (2009) dan “Penerapan *Graph Coloring* untuk Merencanakan Jadwal dengan algoritma Gabungan *Spanning Tree*” oleh Liliana (2010). Adapun hasil analisis yang penulis lakukan terhadap algoritma *Welch-Powell* dan *Spanning Tree* adalah algoritma *Welch-Powell* lebih efisien tetapi menunjukkan hasil yang tidak efektif. Efisien karena menganut metode *First Fit*, yaitu tidak ada

pengubahan warna. Namun hasil yang diberikan tidak efektif dikarenakan pewarnaan yang berdasarkan metode *LDO* dan tidak meninjau simpul tetangganya (mewarnai semua yang tidak bertetangga). Sedangkan algoritma *Spanning Tree* memberikan hasil yang efektif, namun tingkat kompleksitas yang cukup tinggi atau kurang efisien. Hal ini dikarenakan pengecekan berulang yang dilakukan terhadap suatu simpul dan membolehkan pengubahan warna simpul.

Berdasarkan kelemahan dan kelebihan dari kedua algoritma di atas, maka penulis meneliti dan membuat suatu algoritma modifikasi untuk menghasilkan pewarnaan graf yang efektif dan lebih efisien. Sifat yang diadopsi adalah metode *LDO* pada algoritma *Welch-Powell* dan pengecekan simpul tetangga pada algoritma gabungan *Spanning Tree*. Metode *LDO* dianggap sesuai untuk permasalahan penjadwalan kuliah karena memprioritaskan simpul berderajat tertinggi yang pada implementasinya adalah mata kuliah yang terhubung oleh banyak pola sehingga harus didahulukan untuk dijadwalkan. Sedangkan pengecekan simpul tetangga yang dimaksud adalah simpul tetangga dari simpul yang sudah diwarnai dengan warna yang sama. Jika simpul yang akan diwarnai ada dalam daftar simpul tetangga, maka simpul tersebut harus diberi tanda simpul mati atau tidak boleh diwarnai dan penelusuran terhadap simpul lainnya dapat dilanjutkan.

Hal inilah yang membuat penulis tertarik untuk mengambil judul tugas akhir ini yaitu “**Modifikasi Algoritma *Welch-Powell* untuk Melakukan Pewarnaan Graf (*Vertex Colouring*) pada Penjadwalan Kuliah Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN SUSKA RIAU**”.

B. RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut :

1. Bagaimana memberikan warna pada jadwal perkuliahan menggunakan modifikasi algoritma *Welch-Powell* pada pewarnaan graf?
2. Berapakah warna minimal $\chi(G)$ yang dibutuhkan untuk mewarnai setiap simpul pada penjadwalan kuliah?

C. BATASAN MASALAH

Skripsi ini hanya membahas tentang modifikasi algoritma *Welch-Powell* untuk pewarnaan graf pada penjadwalan kuliah meliputi 30 mata kuliah sebagai simpul dan adanya mahasiswa yang memilih mata kuliah yang sama sebagai sisi pada penjadwalan kuliah semester ganjil, TA 2010/2011, di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN SUSKA RIAU, tanpa adanya permintaan perpindahan waktu perkuliahan dari dosen.

D. TUJUAN PENELITIAN

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengaplikasikan modifikasi algoritma *Welch-Powell* untuk melakukan pewarnaan graf pada penjadwalan perkuliahan di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN SUSKA RIAU, serta mendapatkan jumlah warna minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai penjadwalan tersebut.

E. MANFAAT PENELITIAN

Manfaat dari penelitian skripsi ini adalah :

1. Penulis

Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi dalam melakukan penelitian serta mengaplikasikan langsung modifikasi algoritma pewarnaan dalam kasus pewarnaan graf pada Penjadwalan Perkuliahan.

2. Lembaga Pendidikan

Hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai bahan tambahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya dikalangan mahasiswa jurusan matematika.

3. Pengembangan Ilmu Pengetahuan

Menambah khasanah dan mempertegas keilmuan matematika dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.

F. SISTEMATIKA PENULISAN

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini terdiri dari lima bab yaitu :

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan definisi teori graf, terminologi graf, pewarnaan simpul, bilangan kromatik dan modifikasi algoritma pewarnaan graf.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan metode yang penulis gunakan dalam penyelesaian tugas akhir.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan cara-cara secara teoritis dalam mendapatkan hasil penelitian.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini menyajikan beberapa materi pendukung yang akan digunakan sebagai landasan berpikir dalam membahas tugas akhir dengan judul “**Modifikasi Algoritma Welch-Powell untuk Melakukan Pewarnaan Graf (*Vertex Colouring*) pada Penjadwalan Kuliah jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN SUSKA RIAU**”.

2.1 Terminologi Graf

Siang (2006) menyebutkan graf adalah suatu diagram yang memuat informasi tertentu jika diinterpretasikan secara tepat. Graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada di dalam kehidupan sehari-hari dan tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti. Kadang-kadang suatu graf dinyatakan dengan gambarnya. Gambar suatu graf G terdiri dari himpunan titik, himpunan garis-garis yang menghubungkan titik-titik tersebut (beserta arah garis pada graf berarah). Panjang garis, kelengkungan garis serta letak titik tidak berpengaruh dalam suatu graf.

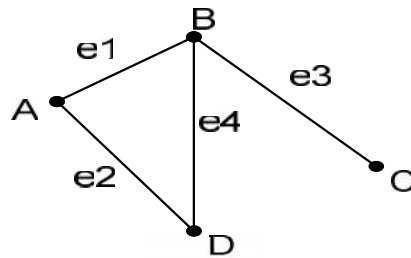
Definisi 2.1 (Lipschuts, 2002): Sebuah graf G terdiri dari dua bagian :

1. Sebuah himpunan $V = V(G)$ memiliki elemen-elemen yang dinamakan dengan titik, simpul atau *node*.
2. Sebuah himpunan $E = E(G)$ merupakan pasangan terurut dari simpul-simpul yang berbeda dinamakan *edge* (sisi).

Suatu graf ditulis dengan notasi $G = (V, E)$.

Berikut merupakan contoh dari sebuah graf :

Contoh 2.1 (Siang, 2006) :



Gambar 2.1 Graf

Berdasarkan gambar 2.1, graf $G = (V, E)$ di atas terdiri dari :

$$V = \{A, B, C, D\}$$

$$E = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}\}$$

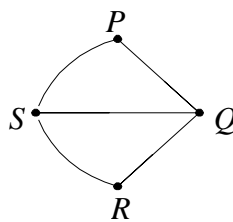
$$= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

Berikut akan diberikan beberapa terminologi dasar yang akan digunakan pada skripsi ini, yaitu :

1. Bertetangga (*Adjacent*)

Dua buah simpul v dan w pada graf G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi (**Robin J Wilson, 1996**). Dengan kata lain, v bertetangga dengan w jika (v, w) adalah sebuah sisi pada graf G .

Contoh 2.2 (Siang, 2006) :



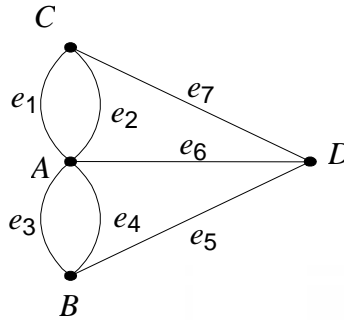
Gambar 2.2 Graf bertetangga

Berdasarkan Gambar 2.2 di atas, simpul P bertetangga dengan simpul Q dan S , tetapi simpul P tidak bertetangga dengan simpul R .

2. Bersisian (*Incident*)

Sisi $e = (v, w)$ dikatakan bersisian atau terkait langsung dengan simpul v dan simpul w (Robin J Wilson, 1996).

Contoh 2.3 (Siang, 2006) :



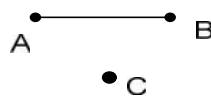
Gambar 2.3 Graf bersisian

e_1 bersisian dengan simpul A dan simpul C, tetapi sisi tersebut tidak bersisian dengan simpul B.

3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya, atau dapat juga dinyatakan bahwa simpul terpencil adalah simpul yang satupun tidak bertetangga dengan simpul-simpul lainnya (Siang, 2006).

Contoh 2.4 (Siang, 2006) :



Gambar 2.4 Simpul Terpencil

Berdasarkan Gambar 2.4 , simpul C adalah simpul terpencil.

4. Derajat (*Degree*)

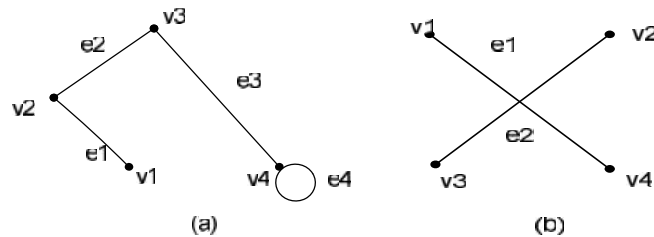
Derajat simpul v (simbol $d(v)$) adalah jumlah garis (sisi) yang berhubungan dengan simpul v dan sisi gelang (*loop*) dihitung dua kali. Derajat total G adalah jumlah derajat semua simpul dalam G (Siang, 2006).

5. Graf terhubung (*Connected Graf*)

Dua simpul v dan w dalam G dikatakan terhubung jika dan hanya jika ada lintasan dari simpul v ke w atau w ke v (Siang, 2006).

Gambar di bawah ini adalah graf terhubung dan tidak terhubung:

Contoh 2.5 (Siang, 2006) :



Gambar 2.5. (a) Graf Terhubung (b) Graf Tidak Terhubung

6. Representasi Graf dalam Matriks

Matriks dapat digunakan untuk menyatakan suatu graf (Marc Lars Lipson, 1992): Berikut ini terdapat beberapa representasi graf dalam matriks :

1. Matriks Ketetanggaan (*Adjacency Matrix*)

Matriks ketetanggaan untuk graf sederhana merupakan matriks bujur sangkar yang unsur-unsurnya hanya terdiri dari dua bilangan yaitu 0 (nol) dan 1 (satu). Baris dan kolom pada matriks ini, masing-masing merupakan representasi dari setiap simpul pada graf tersebut. Misalkan a_{ij} merupakan unsur pada matriks tersebut, maka :

Notasi :

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika ada sisi } (v_i, v_j) \\ 0, & \text{jika tidak ada sisi } (v_i, v_j) \end{cases}$$

2. Matriks Bersisian (*Incidency Matrix*)

Suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_1 dan simpul v_2 jika e menghubungkan kedua simpul tersebut, dengan kata lain $e = (v_1, v_2)$. Seperti halnya matriks ketetanggaan, unsur-unsur matriks bersisian pun hanya terdiri dari dua bilangan yaitu 0 (nol) dan 1 (satu), tapi tidak harus bujur sangkar. Hal ini

disebabkan baris dan kolom pada matriks bersisian, masing-masing merepresentasikan simpul dan sisi pada graf yang dimaksud. Misalkan a_{ij} merupakan unsur pada matriks tersebut, maka :

Notasi :

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$

2.2 Pewarnaan Graf

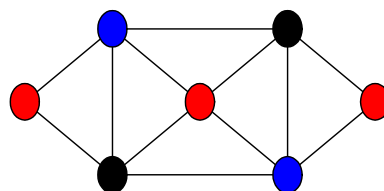
Pewarnaan graf adalah pemberian warna, yang biasanya direpresentasikan sebagai bilangan terurut mulai dari 1 atau dapat juga direpresentasikan langsung dengan menggunakan warna merah, biru, hijau dan lain-lain pada objek tertentu pada suatu graf. Objek tersebut dapat berupa simpul, sisi dan wilayah. Setiap simpul yang berdekatan atau bertetangga tidak mempunyai warna yang sama (Jusuf, 2009).

2.2.1 Pewarnaan simpul (*vertex colouring*)

Pewarnaan simpul dari graf G adalah sebuah proses pemberian warna-warna ke simpul-simpul suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua buah simpul yang bertetangga memiliki warna yang sama (Jusuf, 2009).

Pewarnaan simpul erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik $\chi(G)$, yaitu minimal warna yang digunakan dalam mewarnai simpul (Kenneth, 1992).

Contoh 2.6 (Jusuf, 2009) :



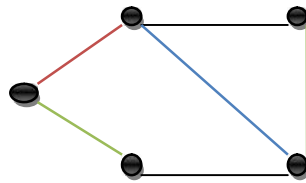
Gambar 2.6 Pewarnaan Simpul

2.2.2 Pewarnaan Sisi (*Edge Coloring*)

Suatu pewarnaan sisi- k untuk graf G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua sisi di G , sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai simpul yang sama diberi warna yang berbeda (Gross et al, 2006).

Berikut ini adalah gambar pewarnaan sisi pada graf.

Contoh 2.7 (Wibisono, 2004) :



Gambar 2.7 Pewarnaan Sisi

2.3 Bilangan Kromatik

Masalah utama dalam pewarnaan simpul graf adalah bagaimana mewarnai semua simpul pada graf sehingga tidak ada simpul – simpul yang saling *adjacent* memiliki warna yang sama. Masalah pewarnaan ini berkaitan erat dengan penggunaan warna semimumimum mungkin.

Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai semua simpul di sebut bilangan kromatik dari graf G , dan disimbolkan dengan $\chi(G)$. Berikut ini sifat – sifat yang menyangkut bilangan kromatik/ jumlah warna minimum untuk pewarnaan simpul (Kenneth, 1992) :

1. $\chi(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf kosong. Hal ini karena semua simpul tidak terhubung, sehingga untuk mewarnai semua simpul dibutuhkan satu warna saja.
2. Graf lengkap K_n memiliki $\chi(G) = n$
3. Graf Lingkaran C_n memiliki $\chi(G) = 2$ bila n genap dan $\chi(G) = 3$ bila n ganjil.
4. Graf Bipartit $K_{m,n}$ selalu bisa diwarnai dengan 2 warna.
5. Graf yang berupa pohon selalu dapat diwarnai dengan 2 warna.

2.4 Algoritma Pewarnaan Graf

Untuk dapat melakukan pewarnaan graf, ada beberapa algoritma yang bisa digunakan. Beberapa algoritma yang telah banyak dikenal sebagai berikut (Hussein Al-Omari dkk, 2006) :

2.4.1 Algoritma Gabungan Spanning Tree

Algoritma gabungan spanning tree merupakan salah satu algoritma pewarnaan graf yang melakukan pewarnaan simpul-simpulnya dengan bebas menentukan simpul awal yang akan diwarnai, kemudian menelusuri satu persatu setiap simpul untuk diberi warna secara berselang-seling. Terakhir, dilakukan pengecekan warna simpul yang terhubung oleh sisi yang bermasalah. Algoritma Gabungan *Spanning Tree* ini menghasilkan solusi melalui beberapa langkah penyelesaian (Hengky Budiman, 2006) :

- *Langkah I : Membangun Spanning Tree*
Pilih sebuah simpul pada graf, kemudian warnai dengan warna 1 (W_1). Berikutnya, perhatikan semua simpul yang bertetangga dengan simpul tersebut. Ada 3 kasus :
 - a) Bila simpul tersebut sudah diwarnai, maka sisi yang menghubungkannya kita tandai sebagai sisi yang bermasalah dengan cara memasukkannya ke tabel sisi bermasalah. Bila sisi tersebut sudah ada dalam tumpukan sisi yang belum diperiksa, maka sisi tersebut dihapus dari tumpukan sisi yang bermasalah tersebut.
 - b) Bila simpul tersebut belum diwarnai, maka sisi yang menghubungkannya kita masukkan kedalam tumpukan sisi yang belum diperiksa.
- *Langkah II : Menyelesaikan sisi yang bermasalah.*
Memeriksa tabel sisi yang bermasalah dan menyelesaikannya. Untuk setiap sisi, yang harus dilakukan adalah memeriksa apakah kedua simpul yang dihubungkan oleh sisi tersebut memiliki warna yang sama.
 - a) Bila sepasang simpul tersebut memiliki warna yang berbeda, maka sisi tersebut aman.

- b) Bila sepasang simpul tersebut memiliki warna yang sama, maka salah satu dari simpul tersebut harus diubah warnanya.
- *Langkah III* : Memeriksa sisi yang bertetangga dengan simpul yang sudah diwarnai.
- *Langkah IV* : (graf telah diwarnai?). Jika beberapa titiknya mempunyai warna yang sama dengan titik tetangganya, maka kembalilah ke langkah 3.
- *Langkah V* : (selesai). Pewarnaan graf telah dilakukan.

2.4.2 Algoritma Welch-Powell

Algoritma *Welch-Powell* merupakan salah satu algoritma pewarnaan graf yang melakukan pewarnaan berdasarkan derajat tertinggi dari simpul-simpulnya atau disebut *Largest Degree Ordering* /LDO (Heri S, 2009) .

Algoritma *Welch-Powell* merupakan metode yang efisien yang memberikan cara mewarnai sebuah graf dengan memberi label titik-titiknya sesuai dengan derajatnya. Algoritma ini di temukan oleh *Welch* dan *Powell* (Abdus Syakur, 2004).

Algoritma *Welch -Powell* merupakan algoritma yang menghasilkan solusi melalui penyelesaian langkah perlangkah (*step by step*) dengan menerapkan 2 hal berikut pada tiap langkahnya (Fletcher dkk, 1996) :

- *Langkah 1*: (melabel titik dengan derajatnya). Label titik v_1, v_2, \dots, v_n sedemikian hingga derajat $(V_1) > \text{derajat } (V_2) > \dots > \text{derajat } (V_n)$.
- *Langkah 2*: (warnai titik belum berwarna pertama dari titik-titik belum berwarna yang berdekatan dengan titik itu). Berikan warna yang belum digunakan pada titik belum berwarna yang pertama pada daftar titik itu. Lakukan hal itu pada semua titik dalam daftar secara terurut, berikan warna baru ini pada setiap titik yang tidak berdekatan dengan setiap titik lain yang telah diwarnai ini.
- *Langkah 3*: (graf telah diwarnai?). Jika beberapa titiknya belum berwarna, maka kembalilah ke langkah 2.
- *Langkah 4*: (selesai). Pewarnaan graf telah dilakukan.

2.4.3 Modifikasi Algoritma *Welch-Powell* pada Pewarnaan Graf

Sifat yang diadopsi dalam modifikasi ini adalah metode *LDO* pada algoritma *Welch-Powell* dan pengecekan simpul tetangga pada algoritma Gabungan *Spanning Tree*. Metode *LDO* dianggap sesuai untuk permasalahan penjadwalan kuliah karena memprioritaskan simpul berderajat tertinggi yang pada implementasinya adalah mata kuliah yang terhubung oleh banyak pola sehingga harus didahulukan untuk dijadwalkan. Sedangkan pengecekan simpul tetangga yang dimaksud adalah simpul tetangga dari simpul yang sudah diwarnai dengan warna yang sama. Jika simpul yang akan diwarnai ada dalam daftar simpul tetangga, maka simpul tersebut harus diberi tanda simpul mati tidak boleh diwarnai dan penelusuran terhadap simpul lainnya dapat dilanjutkan.

Modifikasi Algoritma *Welch-Powell* ini menghasilkan solusi melalui beberapa langkah penyelesaian :

- *Langkah 1* : Membuat matriks *adjacency* (berdasarkan tabel matriks rencana studi mahasiswa).
- *Langkah 2* : Mempresentasikan matriks kedalam graf.
- *Langkah 3* : Mengurutkan simpul menurut derajatnya.
- *Langkah 4* : Semua simpul dikategorikan dalam daftar simpul tetangga dan simpul yang tidak bertetangga untuk tiap-tiap simpulnya.
- *Langkah 5* : Pewarnaan I dimulai dari simpul berderajat tertinggi.
- *Langkah 6* : Berikutnya akan dicari simpul-simpul yang boleh diwarnai dengan (SUW I).
- *Langkah 7* : Periksa pada daftar simpul tetangga dari simpul yang sudah diwarnai dengan simpul utama warna I (SUW I), jika tidak maka simpul boleh diwarnai dengan (SUW II).
- *Langkah 8* : (graf telah diwarnai?). Jika beberapa titiknya belum berwarna, maka kembalilah ke langkah 6.
- *Langkah 9* : (selesai). Pewarnaan graf telah dilakukan.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

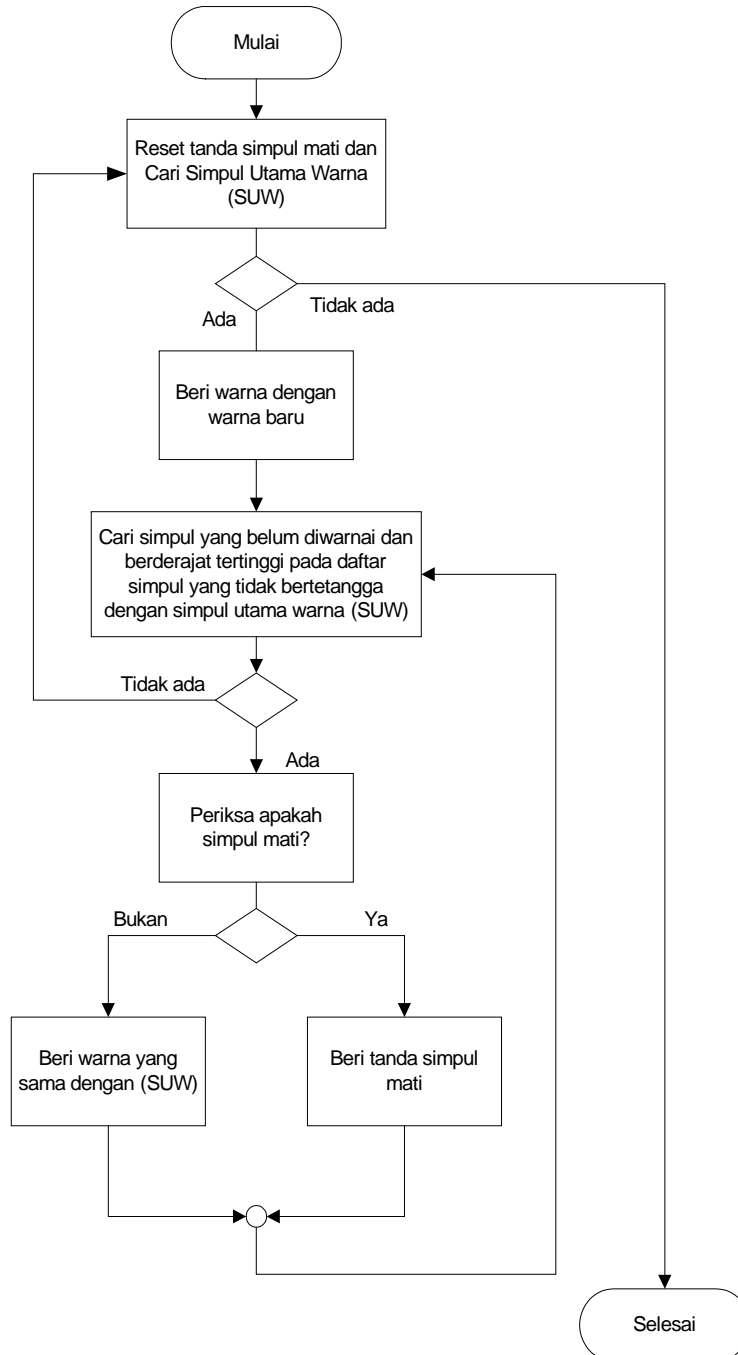
Metode yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah studi kasus penjadwalan kuliah yang berhubungan dengan graf dan pewarnaannya serta modifikasi algoritma *Welch-Powell*.

Langkah-langkah yang akan digunakan dalam penyelesaian tugas akhir ini sebagai berikut :

3.1 Metodologi Pewarnaan Simpul

1. Memahami terminologi graf.
2. Memahami tentang pewarnaan graf.
3. Mengakses dan memahami Jadwal kuliah pada jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Suska Riau.
4. Merepresentasikan mata kuliah sebagai simpul.
5. Merepresentasikan adanya mahasiswa yang memilih mata kuliah yang sama sebagai sisi.
6. Merepresentasikan jadwal kuliah sebagai suatu graf.
7. Membentuk matriks bertetangga yang menyatakan keterhubungan antar mata kuliah dan mahasiswa dengan adanya mahasiswa yang mengambil mata kuliah.
8. Menentukan derajat masing-masing simpul, dalam hal ini menghitung banyaknya jumlah mahasiswa yang saling berhubungan pada setiap mata kuliah.
9. Mengaplikasikan modifikasi algoritma *Welch-Powell* untuk pewarnaan graf pada jadwal kuliah (algoritma *Welch-Powell* : mengurutkan simpul menurut derajatnya, algoritma gabungan *Spanning Tree*: pengecekan simpul tetangga).
10. Menentukan berapa warna minimum $\chi(G)$ yang digunakan untuk mewarnai jadwal kuliah.

Mewarnai jadwal perkuliahan di jurusan Matematika pada tugas akhir ini menggunakan modifikasi algoritma *Welch-Powell*. Cara kerja modifikasi algoritma *Welch-Powell* untuk pewarnaan graf dapat dibuat dalam *flowchart* sebagai berikut :



Gambar 3.1 Flowchart Pewarnaan Graf Menggunakan Modifikasi Algoritma *Welch-Powell*

Keterangan :

- Simpul Utama Warna (SUW) adalah satu simpul pada graf yang memiliki derajat tertinggi yang belum diwarnai.
- Simpul mati adalah simpul dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan SUW tetapi bertetangga dengan simpul yang sudah diwarnai dengan warna SUW sehingga tidak boleh lagi diwarnai dengan warna yang sama.

Metodologi pewarnaan pada peta Jadwal Kuliah Jurusan Matematika dapat direpresentasikan ke dalam *flowchart* sebagai berikut :



Gambar 3.2 *Flowchart* Metodologi Penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN DAN HASIL

Bab ini akan membahas tentang bagaimana mengaplikasikan modifikasi algoritma *Welch-Powell* dalam mewarnai jadwal kuliah di jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN SUSKA RIAU serta menentukan jumlah warna minimum yang digunakan dalam kasus pewarnaan jadwal kuliah tersebut.

4.1 Jadwal Perkuliahan jurusan Matematika

Berikut ini adalah gambaran tabel Rencana Studi Mahasiswa Matematika yang diambil berdasarkan Kartu Rencana Studi Mahasiswa (KRS) :

Keterangan dari tabel 4.1 diatas adalah sebagai berikut:

Mata Kuliah :

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------|
| 1 = Kalkulus I | 30 = Statistik Multivariat |
| 2 = Fisika Dasar | |
| 3 = Pendidikan Kewarganegaraan | |
| 4 = Statistik Dasar | |
| 5 = Aqidah | |
| 6 = Bahasa Indonesia | |
| 7 = Algoritma dan Pemograman | |
| 8 = Praktikum Statistik Dasar | |
| 9 = Geometri | |
| 10 = Matematika Ekonomi | |
| 11 = Teori Probabilitas | |
| 12 = Teknik Sampling | |
| 13 = Logika Matematika | |
| 14 = Kalkulus 3 | |
| 15 = Pemograman Linear | |
| 16 = Al-Qur'an | |
| 17 = Enabling Skill | |
| 18 = Aljabar Linear Numerik | |
| 19 = Demografi | |
| 20 = Struktur Aljabar II | |
| 21 = Metode Numerik | |
| 22 = Analisis Real | |
| 23 = Hadits | |
| 24 = Desain Eksperimen | |
| 25 = Persamaan Differensial Parsial | |
| 26 = Kapita Selekt Komputasi | |
| 27 = Kapita Selekt Manajemen | |
| 28 = Kapita Selekt Statistik | |
| 29 = Analisis Survival | |

4.2 Cara Merepresentasikan Tabel Matriks Studi Mahasiswa/i ke dalam Matriks *Adjacency*

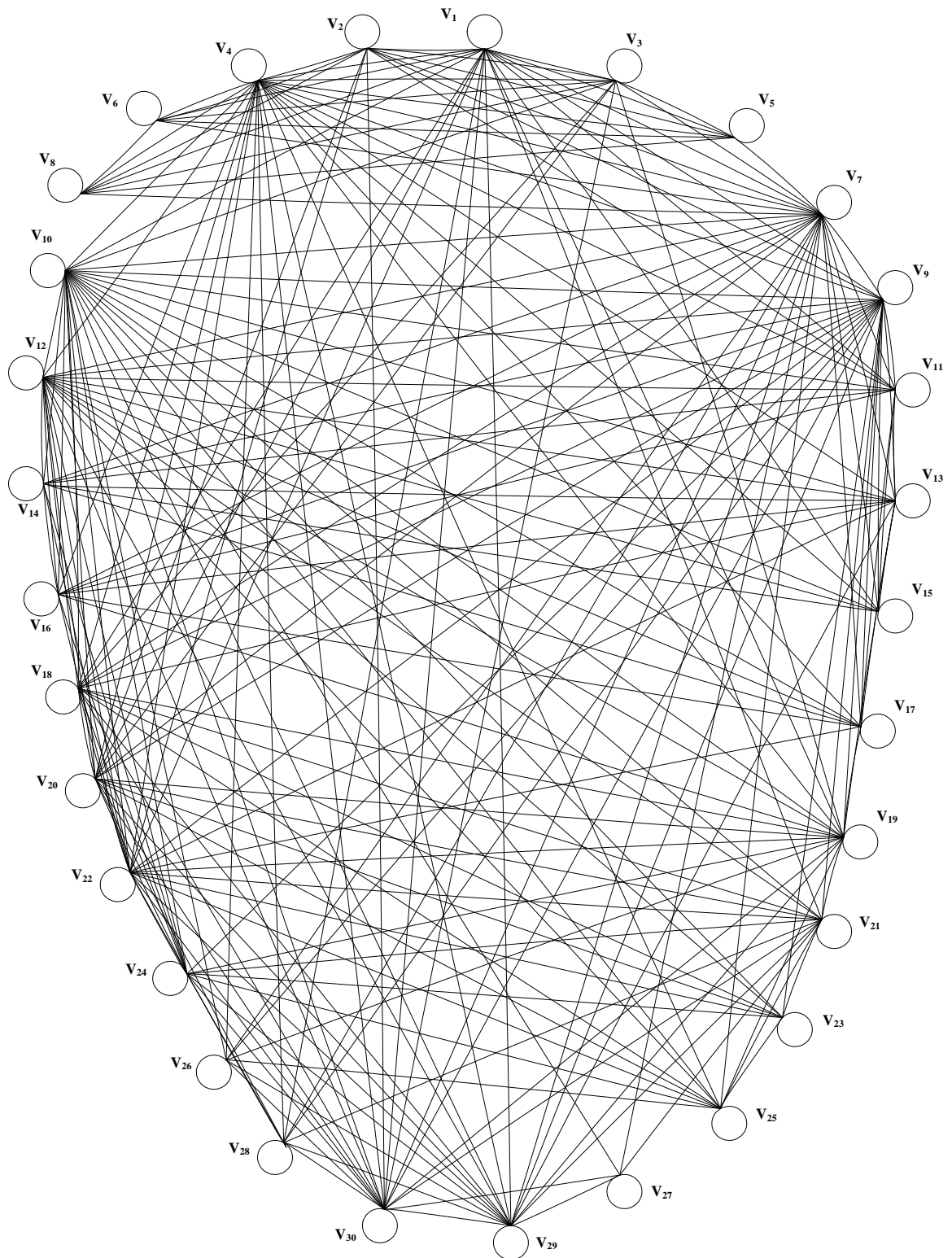
Jadwal Kuliah merupakan representasi dari tabel Matriks Studi Mahasiswa yang kemudian dapat dibuat kedalam matriks *adjacency*, sehingga hasil dari matriks *adjacency* tersebut di presentasikan kedalam sebuah graf. Mata kuliah Jurusan Matematika terdiri dari 30 buah mata kuliah yang diikuti oleh 267 orang mahasiswa. Jadwal Kuliah yang terdiri dari beberapa mata kuliah direpresentasikan menjadi suatu graf dengan merepresentasikan mata kuliah sebagai simpul dan adanya mahasiswa yang memilih mata kuliah yang sama sebagai sisi. Masing-masing mata kuliah dan mahasiswa di beri nama $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{30}$ dan adanya mahasiswa yang mengambil mata kuliah yang sama sebagai $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{267}$.

Berikut ini adalah gambar yang merepresentasikan tabel Rencana Studi Mahasiswa ke dalam matriks *adjacency*:

4.3 Cara Merepresentasikan Matriks *Adjacency* Studi Mahasiswa ke dalam Sebuah Graf

Cara merepresentasikan jadwal kuliah jurusan Matematika ke dalam suatu graf yang terdiri dari simpul dan sisi yang menghubungkannya, sehingga dapat terlihat simpul yang bertetangga dan tidak bertetangga dari sisi-sisi yang menghubungkan simpul.

Berikut ini adalah gambar yang merepresentasikan jadwal kuliah Jurusan Matematika ke dalam suatu graf :



Gambar 4.1 Representasi Graf Rencana Studi Mahasiswa Jurusan Matematika

4.4 Menentukan Derajat Setiap Simpul pada Graf Rencana Studi Mahasiswa Jurusan Matematika

Derajat setiap mata kuliah yang direpresentasikan sebagai simpul dapat dihitung dengan cara menghitung berapa banyak sisi yang terhubung pada setiap simpul pada graf. Derajat setiap simpul dapat ditentukan dengan mudah dari matriks *adjacency* di atas, yaitu dengan menjumlahkan setiap baris atau kolom pada setiap simpul.

Berdasarkan matriks *adjacency* pada jadwal kuliah jurusan matematika dapat ditentukan derajat setiap simpulnya, dapat dilihat pada tabel 4.2 di bawah ini :

Tabel 4.2 Derajat Simpul Graf Jadwal Kuliah Jurusan Matematika

No	Mata Kuliah	Simpul Graf	Derajat Simpul
1	Kalkulus I	1	19
2	Fisika Dasar	2	12
3	Pendidikan Kewarganegaraan	3	12
4	Statistik Dasar	4	24
5	Aqidah	5	7
6	Bahasa Indonesia	6	7
7	Algoritma dan Pemograman	7	23
8	Praktikum Statistik Dasar	8	7
9	Geometri	9	23
10	Matematika Ekonomi	10	24
11	Teori Probabilitas	11	11
12	Teknik Sampling	12	20
13	Logika Matematika	13	14
14	Kalkulus 3	14	11

15	Pemograman Linear	15	23
16	Hadits	16	13
17	Enabling Skill	17	12
18	Aljabar Linear Numerik	18	18
19	Demografi	19	19
20	Struktur Aljabar II	20	19
21	Analisis Real	21	16
22	Metode Numerik	22	21
23	Al-Qur'an	23	10
24	Desain Eksperimen	24	16
25	Persamaan Differensial Partial	25	13
26	Kapita Selekt Manajemen	26	9
27	Kapita Selekt Komputasi	27	5
28	Kapita Selekt Statistik	28	11
29	Analisis Survival	29	17
30	Statistik Multivariat	30	20

4.5 Pewarnaan Mata Kuliah pada Jadwal Kuliah Jurusan Matematika Menggunakan Modifikasi Algoritma *Welch-Powell*

Pewarnaan pada jadwal kuliah Jurusan Matematika dilakukan dengan konsep pewarnaan simpul (*vertex coloring*). Berdasarkan teori graf, solusi terbaik dari suatu pewarnaan graf adalah menggunakan warna semimumum mungkin.

Sub-bab ini akan dijelaskan bagaimana jalannya modifikasi algoritma *Welch-Powell* untuk pewarnaan jadwal kuliah Jurusan Matematika. Berikut ini akan di jelaskan tahap-tahapnya :

1. Mengurutkan simpul menurut derajatnya.

Mengurutkan simpul disini adalah urutkan simpul dari yang mempunyai jumlah sisi terbanyak atau dengan kata lain, simpul diurutkan berdasarkan jumlah derajat dari yang paling besar hingga yang paling kecil. Melakukan pewarnaan pada graf di mulai dari simpul yang memiliki jumlah derajat paling banyak.

Berdasarkan Tabel 4.2, dapat dibentuk kembali tabel yang berisikan pengurutan simpul berdasarkan jumlah derajat paling banyak sebagai berikut :

Tabel 4.3 Pengurutan Simpul Jadwal Kuliah Berdasarkan Jumlah Derajat Terbanyak

No	Mata Kuliah	Simpul Graf	Derajat simpul $d(v_i)$
1	Statistik Dasar	4	24
2	Matematika Ekonomi	10	24
3	Praktikum Statistik Dasar	7	23
4	Geometri	9	23
5	Pemograman Linear	15	23
6	Metode Numerik	22	21
7	Teknik Sampling	12	20
8	Statistik Multivariat	30	20
9	Kalkulus I	1	19
10	Demografi	19	19
11	Struktur Aljabar II	20	19
12	Aljabar Linear Numerik	18	18
13	Analisis Survival	29	17
14	Analisis Real	21	16
15	Desain Eksperimen	24	16
16	Logika Matematika	13	14
17	Hadits	16	13
18	Persaman Differensial Parsial	25	13
19	Fisika Dasar	2	12
20	Pendidikan Kewarganegaraan	3	12
21	Enabling Skill	17	12
22	Teori Probabilitas	11	11

23	Kalkulus III	14	11
24	Kapita Selekt Statistik	28	11
25	Al-Qur'an	23	10
26	Kapita Selekt Manajemen	26	9
27	Aqidah	5	7
28	Bahasa Indonesia	6	7
29	Algoritma dan Pemograman	8	7
30	K.Selekt Komputasi	27	5

2. Semua simpul dikategorikan dalam daftar simpul tetangga dan simpul yang tidak bertetangga untuk tiap-tiap simpulnya.

3. Pewarnaan I dimulai dari simpul berderajat tertinggi yang belum diwarnai (SUW 1) yaitu (simpul ' v_4 ') yang akan diwarnai dengan warna 'merah' seperti terlihat pada matriks berikut:

4. Berikutnya akan dicari simpul-simpul yang boleh diwarnai dengan (SUW 1).
- Pencarian dilakukan dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (SUW 1) yaitu (simpul ' v_4 '), maka didapat (simpul ' v_{21} ') dengan derajat tertinggi.
 - Periksa pada daftar simpul tetangga dari simpul yang sudah diwarnai dengan (SUW 1) yaitu (simpul ' v_4 '), adakah yang sudah diwarnai dengan (SUW 1)? Jika tidak, maka (simpul ' v_{21} ') boleh diwarnai dengan warna yang sama (SUW 1).

5. Telusuri kembali simpul-simpul yang boleh diwarnai dengan warna (SUW 1).
- Pencarian dilakukan dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_4 ') dan belum diwarnai serta mempunyai derajat tertinggi adalah (simpul v_{21}).
 - Pemeriksaan dilakukan pada daftar simpul tetangga untuk (simpul ' v_{21} '), ternyata di dapat bahwa (simpul ' v_{24} ') bertetangga dengan (simpul ' v_{21} ') yang sudah diwarnai dengan (SUW 1). Hal ini berarti bahwa simpul (simpul ' v_{24} ') adalah simpul mati dan tidak boleh diwarnai dengan warna yang sama yaitu (SUW 1), melainkan diberi tanda simpul mati.

6. Telusuri kembali simpul-simpul yang boleh diwarnai dengan warna (SUW 1).
- Pencarian dilakukan dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_4 ') dan belum diwarnai serta mempunyai derajat tertinggi adalah (simpul v_{14}).
 - Periksa pada daftar simpul tetangga dari simpul yang sudah diwarnai dengan (SUW 1) yaitu (simpul ' v_{21} '), adakah yang sudah diwarnai dengan (SUW 1)? Jika tidak, maka (simpul ' v_{14} ') boleh diwarnai dengan warna yang sama (SUW 1).

7. Lakukan hal yang sama untuk simpul ' v_{23} ', dan ' v_{27} '.
- Simpul ' v_{23} ' tidak bertetangga dengan Simpul ' v_{21} ', maka Simpul ' v_{23} ' diberi (SUW I).
 - Simpul ' v_{27} ' bertetangga dengan Simpul ' v_{21} ', maka Simpul ' v_{27} ' diberi tanda simpul mati.

8. Setelah semua simpul pada daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_4 ') habis diwarnai maka selanjutnya adalah :
- Mencari (SUW 2) yang belum diwarnai maka di dapat (simpul ' v_{10} ') sebagai (SUW 2) yang akan diwarnai dengan warna 'biru'.
 - Pencarian dilakukan dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_{10} ') dan belum diwarnai serta mempunyai derajat tertinggi adalah (simpul v_2).
 - Periksa pada daftar simpul tetangga dari simpul yang sudah diwarnai dengan (SUW 2) yaitu (simpul ' v_{10} '), adakah yang sudah diwarnai dengan (SUW 2)? Jika tidak, maka (simpul ' v_2 ') boleh diwarnai dengan warna yang sama (SUW 2).

9. Lakukan hal yang sama untuk simpul ' v'_{28} ', ' v'_5 ', ' v'_6 ', dan ' v'_8 '.
- Simpul ' v_{28} ' tidak bertetangga dengan simpul ' v_{10} ' dan ' v_2 ' maka simpul ' v_{28} ' diberi tanda simpul mati.
 - Simpul ' v_5 ', ' v_6 ', dan ' v_8 ' bertetangga dengan simpul ' v_2 ', maka simpul ' v_5 ', ' v_6 ', dan ' v_8 ' diberi tanda simpul mati.
 - Mereset kembali tanda simpul mati apakah ada yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_{10} '). Jika tidak, maka pewarnaan dilanjutkan dengan simpul-simpul lain dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_{10} ').

10. Setelah semua simpul pada daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_{10} ') habis diwarnai maka selanjutnya adalah :
- Mereset kembali tanda simpul mati dan mencari (SUW 3), maka didapat (simpul ' v_7 ') sebagai (SUW 3) yang akan diwarnai dengan warna 'kuning'.
 - Diikuti dengan pewarnaan simpul-simpul lain dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (SUW 3) dan belum diwarnai yaitu simpul ' v_{22} ', ' v_{24} ', ' v_{11} ' dan ' v_{23} '.
 - Simpul ' v_{22} ' merupakan simpul tertinggi yang tidak bertetangga dengan ' v_7 ', maka simpul ' v_{22} ' boleh diwarnai dengan (SUW 3).
 - Simpul ' v_{24} ' bertetangga dengan ' v_{22} ', maka simpul ' v_{24} ' tidak boleh diwarnai dengan (SUW 3), melainkan tetap diberi tanda simpul mati.
 - Simpul ' v_{11} ' tidak bertetangga dengan simpul ' v_7 ' dan ' v_{22} ' maka simpul ' v_{11} ' boleh diwarnai dengan (SUW 3).
 - Simpul ' v_{23} ' bertetangga dengan simpul ' v_{22} ', maka simpul ' v_{23} ' tidak boleh diwarnai dengan (SUW 3), melainkan tetap diberi tanda simpul mati.

11. Setelah semua simpul pada daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_7 ') habis diwarnai maka selanjutnya adalah :
- Mereset kembali tanda simpul mati dan mencari (SUW 4), maka didapat (simpul ' v_9 ') sebagai (SUW 4) yang akan diwarnai dengan warna 'ungu'.
 - Diikuti dengan pewarnaan simpul-simpul lain dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (SUW 4) dan belum diwarnai yaitu simpul ' v_{25} ', ' v_3 ', ' v_5 ', ' v_6 ', ' v_8 ' dan ' v_{27} '.
 - Simpul ' v_{25} ' merupakan simpul tertinggi yang tidak bertetangga dengan ' v_9 ', maka simpul ' v_{25} ' boleh diwarnai dengan (SUW 4).
 - Simpul ' v_3 ' tidak bertetangga dengan simpul ' v_9 ' dan ' v_{25} ' maka simpul ' v_3 ' boleh diwarnai dengan (SUW 4).
 - Simpul ' v_5 ', ' v_6 ' dan ' v_8 ' bertetangga dengan simpul ' v_3 ', maka simpul ' v_5 ', ' v_6 ' dan ' v_8 ' tidak boleh diwarnai dengan (SUW 4), melainkan diberi tanda simpul mati.
 - Simpul ' v_{27} ' tidak bertetangga dengan simpul ' v_{25} ' dan ' v_3 ' maka simpul ' v_{27} ' boleh diwarnai dengan (SUW 4).

12. Setelah semua simpul pada daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_9 ') habis diwarnai maka selanjutnya adalah :
- Mereset kembali tanda simpul mati dan mencari (SUW 5), maka didapat (simpul ' v_{15} ') sebagai (SUW 5) yang akan diwarnai dengan warna 'orange'.
 - Diikuti dengan pewarnaan simpul-simpul lain dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (SUW 5) dan belum diwarnai yaitu simpul ' v_5 ' ' v_6 ', dan ' v_8 '.
 - Simpul ' v_5 ' tidak bertetangga dengan simpul ' v_{15} ', maka simpul ' v_5 ' boleh diwarnai dengan (SUW 5).
 - Simpul ' v_6 ' dan ' v_8 ' bertetangga dengan simpul ' v_5 ', maka simpul ' v_6 ' dan ' v_8 ' tidak boleh diwarnai dengan (SUW 5), melainkan diberi tanda simpul mati.

13. Setelah semua simpul pada daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_{15} ') habis diwarnai maka selanjutnya adalah :
- Mereset kembali tanda simpul mati dan mencari (SUW 6), maka didapat (simpul ' v_{12} ') sebagai (SUW 6) yang akan diwarnai dengan warna 'pink'.
 - Diikuti dengan pewarnaan simpul-simpul lain dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (SUW 6) dan belum diwarnai yaitu simpul ' v_1 ', ' v_{26} ', ' v_6 ' dan ' v_8 '.
 - Simpul ' v_1 ' merupakan simpul tertinggi yang tidak bertetangga dengan simpul ' v_{12} ', maka simpul ' v_1 ' boleh diwarnai dengan (SUW 6).
 - Simpul ' v_{26} ' tidak bertetangga dengan simpul ' v_{12} ' dan ' v_1 ', maka simpul ' v_{26} ' boleh diwarnai dengan (SUW 6).
 - Simpul ' v_6 ' dan ' v_8 ' bertetangga dengan simpul ' v_1 ', maka simpul ' v_6 ' dan ' v_8 ' tidak boleh diwarnai dengan (SUW 6), melainkan tetap diberi tanda simpul mati.

14. Setelah semua simpul pada daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_{12} ') habis di warnai maka selanjutnya adalah :
- Mereset kembali tanda simpul mati dan mencari (SUW 7), maka didapat (simpul ' v_{30} ') sebagai (SUW 7) yang akan diwarnai dengan warna 'coklat'.
 - Diikuti dengan pewarnaan simpul-simpul lain dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (SUW 7) dan belum diwarnai yaitu simpul ' v_{16} ', ' v_{17} ', ' v_{23} ', ' v_6 ' dan ' v_8 '.
 - Simpul ' v_{16} ' merupakan simpul tertinggi yang tidak bertetangga dengan simpul ' v_{30} ', maka simpul ' v_{16} ' boleh di warnai dengan (SUW 7).
 - Simpul ' v_{17} ' bertetangga dengan simpul ' v_{16} ', maka simpul ' v_{17} ' tidak boleh di warnai dengan (SUW 7), melainkan tetap diberi tanda simpul mati.
 - Simpul ' v_{23} ', ' v_6 ' dan ' v_8 ' bertetangga dengan simpul ' v_{16} ', maka simpul ' v_{23} ', ' v_6 ' dan ' v_8 ' tidak boleh di warnai dengan (SUW 7), melainkan tetap diberi tanda simpul mati.

15. Setelah semua simpul pada daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_{30} ') habis diwarnai maka selanjutnya adalah :
- Mereset kembali tanda simpul mati dan mencari (SUW 8), maka didapat (simpul ' v_{19} ') sebagai (SUW 8) yang akan diwarnai dengan warna 'abu-abu'.
 - Diikuti dengan pewarnaan simpul-simpul lain dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (SUW 8) dan belum diwarnai yaitu simpul ' v_{23} ', ' v_6 ' dan ' v_8 '.
 - Simpul ' v_{23} ' tidak bertetangga dengan simpul ' v_{19} ', maka simpul ' v_{23} ' boleh diwarnai dengan (SUW 8).
 - Simpul ' v_6 ' tidak bertetangga dengan simpul ' v_{19} ' dan ' v_{23} ', maka simpul ' v_6 ' boleh diwarnai dengan (SUW 8).
 - Simpul ' v_8 ' bertetangga dengan simpul ' v_6 ', maka simpul ' v_8 ' tidak boleh diwarnai dengan (SUW 8), melainkan tetap diberi tanda simpul mati.

16. Setelah semua simpul pada daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_{19} ') habis di warnai maka selanjutnya adalah :
- Mereset kembali tanda simpul mati dan mencari (SUW 9), maka didapat (simpul ' v_{20} ') sebagai (SUW 9) yang akan diwarnai dengan warna 'hijau'.
 - Diikuti dengan pewarnaan simpul-simpul lain dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (SUW 9) dan belum diwarnai yaitu simpul ' v_{13} ', ' v_{17} ' dan ' v_8 '
 - Simpul ' v_{13} ' merupakan simpul tertinggi yang tidak bertetangga dengan simpul ' v_{20} ', maka simpul ' v_{13} ' boleh di warnai dengan (SUW 9).
 - Simpul ' v_{17} ' bertetangga dengan simpul ' v_{13} ', maka simpul ' v_{17} ' tidak boleh di warnai dengan (SUW 9), melainkan tetap diberi tanda simpul mati.
 - Simpul ' v_8 ' tidak bertetangga dengan simpul ' v_{13} ', maka simpul ' v_8 ' boleh di warnai dengan (SUW 9).

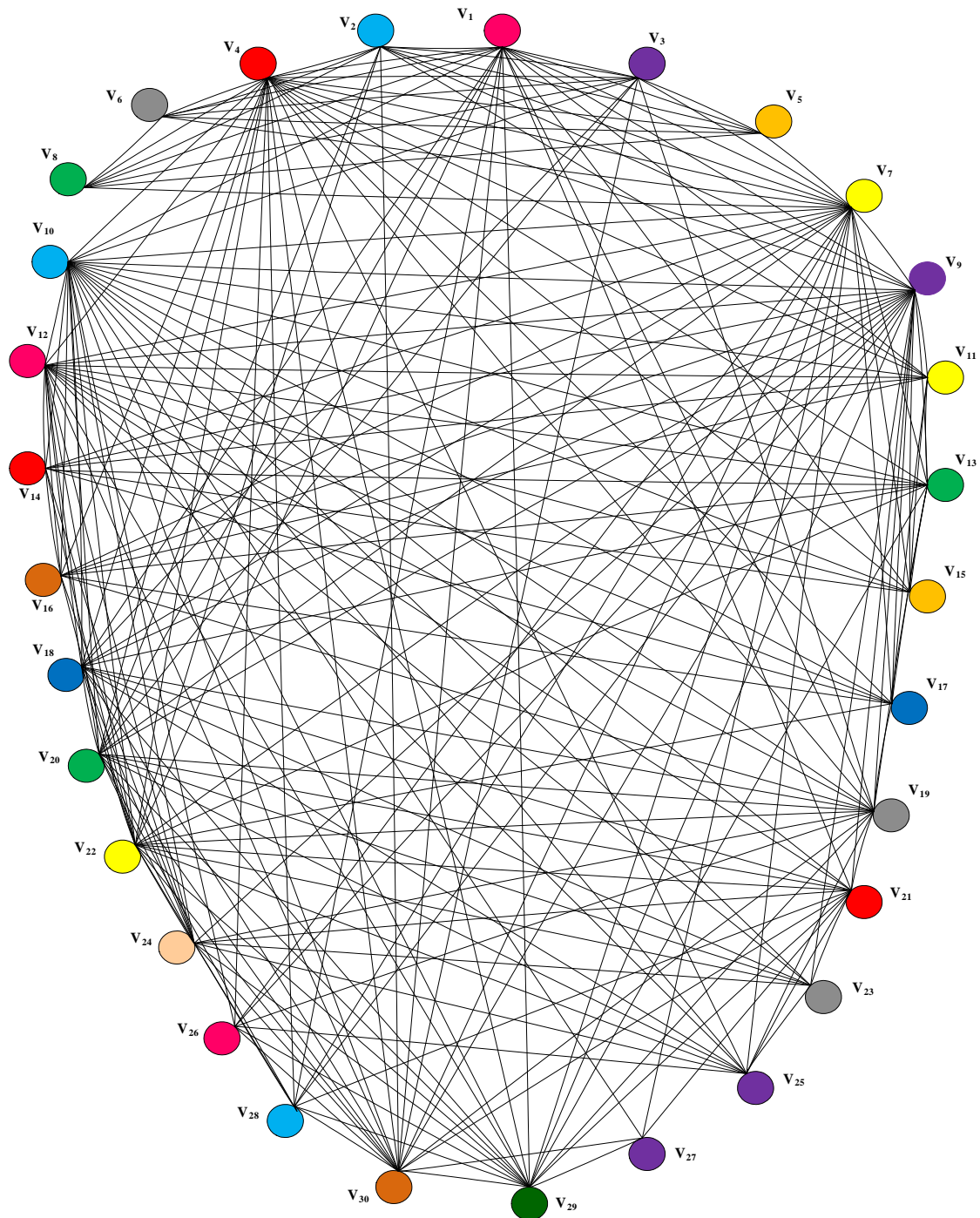
17. Setelah semua simpul pada daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_{20} ') habis diwarnai maka selanjutnya adalah :
- Mereset kembali tanda simpul mati dan mencari (SUW 10), maka didapat (simpul ' v_{18} ') sebagai (SUW 10) yang akan diwarnai dengan warna 'biru tua'.
 - Diikuti dengan pewarnaan simpul-simpul lain dalam daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (SUW 9) dan belum diwarnai yaitu simpul ' v_{17} '.
 - Simpul ' v_{17} ' tidak bertetangga dengan simpul ' v_{18} ', maka simpul ' v_{17} ' boleh diwarnai dengan (SUW 9).

18. Setelah semua simpul pada daftar simpul yang tidak bertetangga dengan (simpul ' v_{18} ') habis diwarnai maka selanjutnya adalah :
- Mereset kembali tanda simpul mati dan mencari (SUW 11), maka didapat (simpul ' v_{29} ') sebagai (SUW 11) yang akan diwarnai dengan warna 'hijau lumut'.

19. Karena simpul ' v_{24} ' adalah simpul terakhir dan juga merupakan simpul mati yang belum diwarnai sekaligus sebagai (SUW 12), maka simpul ' v_{24} ' akan diwarnai dengan warna 'cream'.

20. (selesai). Pewarnaan graf telah dilakukan

Sehingga, hasil pewarnaan graf dengan modifikasi algoritma *Welch-Powell* ini adalah :



Gambar 4.2 Hasil Pewarnaan Graf Rencana Studi Mahasiswa Jurusan Matematika

4.6 Menentukan Jumlah Warna Minimum Jadwal Kuliah Jurusan Matematika

Jumlah warna minimum atau disebut dengan bilangan kromatik yang diperoleh setelah dilakukan pewarnaan menggunakan modifikasi algoritma *Welch-Powell* dalam mewarnai simpul pada jadwal kuliah di Jurusan Matematika dapat dilihat dari berapa banyak anggota warna. Jadwal kuliah Jurusan Matematika yang telah diwarnai menggunakan 12 warna dapat dilihat pada Tabel 4.22 berikut ini:

$$\chi(G) = 12$$

$$n = 267$$

Berdasarkan hasil pewarnaan di atas, dapat kita simpulkan sebagai berikut:

1. Simpul pada graf di atas diwarnai oleh 12 macam warna ($\chi(G) = 12$), artinya untuk mata kuliah dengan simbol simpul berwarna sama, yaitu :
 - (v_4 / Statistik Dasar), (v_{21} / Metode Numerik), dan (v_{14} / Kalkulus III)
 - (v_{10} / Matematika Ekonomi), (v_2 / Fisika Dasar), dan (v_{28} / Kapita Selekt Statistik)
 - (v_7 / Algoritma dan Pemograman), (v_{22} / Analisis Real), dan (v_{11} / Teori Probabilitas)
 - (v_9 / Geometri), (v_{25} / Persamaan Differensial Parsial), (v_3 / Pendidikan Kewarganegaraan) dan (v_{27} / Kapita Selekt Manajemen)
 - (v_{15} / Pemograman Linear), dan (v_5 / Aqidah)
 - (v_{12} / Teknik Sampling), (v_1 / Kalkulus I), dan (v_{26} / Kapita Selekt Komputasi)
 - (v_{30} / Statistik Multivariat), dan (v_{16} / Al-Qur'an)
 - (v_{19} / Praktikum Statistik Dasar), dan (v_{15} / Pemograman Linear)
 - (v_{20} / Struktur Aljabar II), (v_{13} / Logika Matematika) dan (v_8 / Praktikum Statistik Dasar)
 - (v_{18} / Aljabar Linear Numerik) dan (v_{17} / Enabling Skill)
 - (v_{29} / Analisis Survival)
 - (v_{24} / Desain Eksperimen).

Berdasarkan keterangan di atas, penjadwalan mata kuliah dengan warna yang sama tidak akan bentrok, jika dijadwalkan secara bersamaan (dari sisi mahasiswa) dengan ketentuan harus berbeda ruangan.

2. Jumlah slot waktu yang harus disediakan untuk ke-30 mata kuliah tersebut sebanyak 12 waktu yang berbeda, sesuai dengan $\chi(G) = 12$, serta dengan penggunaan ruang kelas yang lebih optimal yaitu 4 buah ruangan dalam waktu yang bersamaan (paralel).

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab IV maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Pewarnaan simpul pada jadwal kuliah dapat dilakukan menggunakan modifikasi algoritma *Welch-Powell* dengan cara membuat matriks *adjacency* terlebih dahulu. Graf jadwal kuliah ini terdiri simpul (30 mata kuliah) dan sisi (adanya mahasiswa yang mengambil mata kuliah yang sama).
2. Modifikasi Algoritma *Welch-Powell* sesuai diterapkan pada pewarnaan graf dengan jumlah simpul yang besar. Hal ini dikarenakan modifikasi algoritma *Welch-Powell* memiliki langkah yang rinci dan terarah dalam pemilihan simpul yang berderajat tertinggi kemudian akan diwarnai. Setiap simpul yang bertetangga dengan simpul yang telah diberi warna, akan di beri tanda simpul mati yang nantinya dapat diselesaikan, sehingga pewarnaan seluruh simpul dapat terpenuhi.
3. Jumlah warna minimum (bilangan kromatik) pewarnaan jadwal kuliah pada jurusan Matematika pada penelitian ini diperoleh 12 warna, warna antara mata kuliah yang terhubung dengan satu sisi memiliki warna berbeda.

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas salah satu aplikasi dalam bidang teori graf tentang pewarnaan graf yang diaplikasikan pada pewarnaan simpul pada jadwal kuliah menggunakan modifikasi algoritma *Welch-Powell*. Penelitian lain yang dapat dikembangkan dari tugas akhir ini adalah Pewarnaan graf bisa juga dilakukan pada kasus penugasan menggunakan algoritma lain serta pewarnaan dapat dilakukan dengan menggunakan program komputer.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-omari, Hussein & Khair Eddin Sabri, “*New Graph Colouring Algorithms*”, www.Scipub.Org/fulltext/jms2/jms_224739-741. Pdf, 2006. Tanggal akses: 9 september 2011, pukul 13.00 WIB.
- As’ad, Nabila. “Aplikasi Pewarnaan Graf pada Pemecahan Masalah Penyusunan Jadwal”, Makalah Penelitian Pewarnaan Graf. Bandung. 2006.
- Budiman, Hengky. “Penerapan Graph Colouring untuk Merencanakan Jadwal”, Makalah Penelitian. ITB, Bandung, 2006.
- Fletcher, Hoyle, dan Patty. “*Foundations of Discrete Mathematics*”, Mc Graw-Hill, Tokyo, 1981.
- Jusuf, Heni. “Pewarnaan Graph pada Simpul untuk Mendeteksi Konflik Penjadwalan Kuliah,” Seminar Nasional Aplikasi Teknologi Informasi (SNATI 2009), F1-F4. Yogyakarta. 2009.
- Liliana, “Aplikasi *Colouring Graf* dalam Menyelesaikan Masalah Penjadwalan”, skripsi, 2010.
- Lipson, Marc Lars. “*2000 Solved Problem in Discrete Mathematics*”, Mc Graw Hill, New York, 1992.
- Lipschuts, Seymour, dan Larslipson Marc. “*Matematika Diskrit Jilid 2 Schaum’s*”. Salemba Teknika, Jakarta. 2002.
- Rahayu, Kartika Puji, “Implementasi Masalah Pewarnaan Graph pada Penjadwalan Kuliah dengan Algoritma *Welch-Powell*”, skripsi, 2010.
- Rosen, Kenneth H. “*Discrete Mathematics and Its Applications 4th Edition*”, Mc Graw Hill, New York, 1992.
- Siang, Jong Jek, M. Sc. “*Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*”. Penerbit Andi, Yogyakarta. 2006.
- Sutarno, Heri, dkk. “Pembangunan Sistem Penjadwalan Kuliah Menggunakan Algoritma Pewarnaan Graf”, Makalah Penelitian Algoritma Pewarnaan IKIP. Bandung. 2009.
- Wilson, Robin J, “*Introduction to Graph Theory*”, British Library, London, 1996.